**XII Открытая Краевая олимпиада по геометрии**

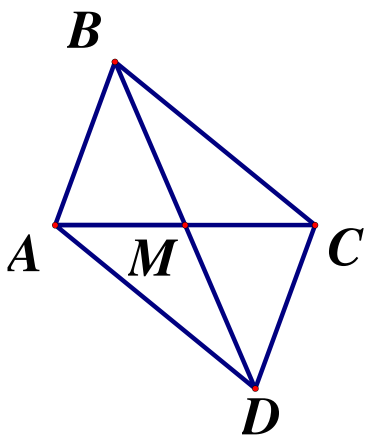
**среди учащихся 8-11 кл. им. проф. С.А. Анищенко**

**Заочный тур**

**9 класс**

**1. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух других его сторон.**

Доказательство.




1. Д.п. $MD=BM$, $D\in BM$.

2. В треугольнике $ABD$: $BD < AB+AD$

3. $BD=1/2\ BM$, следовательно $BM < (AB+AD)/2$

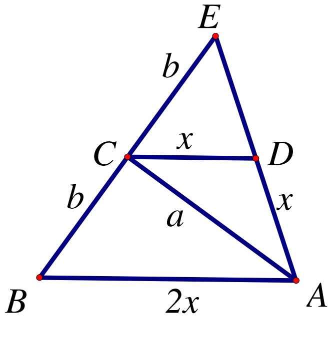
4. Но $AD=BC$, т.к. $ABCD$ – параллелограмм (по признаку).

Таким образом, $BM < (AB+BC)/2$.

Ч.т.д.

**2. Основание *AB* трапеции *ABCD* вдвое длиннее основания *CD* и вдвое длиннее боковой стороны *AD*. *AC*=*a*, *BC*=*b*. Найдите площадь трапеции.**

Решение.




1. Пусть $CD=AD=x$, тогда $BA=2x$.

2. $BC\cap AD=E$.

3. Очевидно, что $CD$ – средняя линия треугольника $BEA$, и $C$ – середина $BE$. Следовательно, $CE=b$, $ED=x$.

4. Приходим к выводу, что треугольник $BEA$ –

равнобедренный и медиана $AC$ является высотой, т.е. $AC \perp BE$.

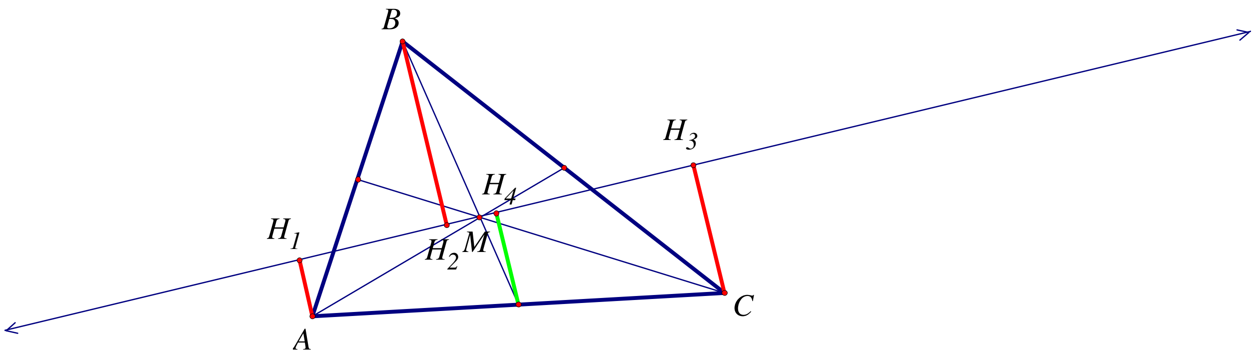
5. $S_{DTF} = 1/2a \cdot 2b = ab$.

6. $\Delta\ CED \sim \Delta\ BEA$, с коэффициентом подобия $k=1/2$. Тогда $S_{CED}=1/4\ ab$ и $S_{ABCD}=3/4\ ab$.

Ответ: $S_{ABCD}=3/4\ ab$.

**3. В треугольнике *ABC* через центр тяжести *M* проведена произвольная прямая. Докажите, что сумма расстояний от точек *A* и *C* до этой прямой равна расстоянию от точки *B* до этой прямой.**

Доказательство.




---

1. Пусть $AH_1$, $BH_2$, $CH_3$ – искомые расстояния. Докажем, что $AH_1+CH_3=BH_2$.

2. Пусть $B_1$ – середина $AC$, и $BH_4 \perp H_1H_3$.

3. $\Delta\ BH_2M \sim \Delta\ B_1H_4M$, причем $k=BM/BM_1=2$ (по свойству медиан треугольника). Следовательно, $BH_2=2B_1H_4$.

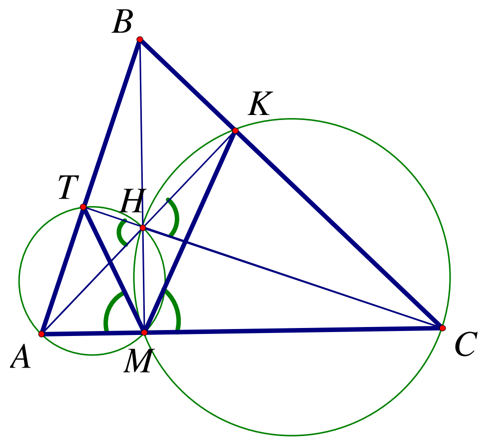
4. В трапеции $AH_1H_3C$ $B_1H_4$ – средняя линия. Следовательно, $B_1H_4=(AH_1+CH_3)/2$.

Из 3-4 следует, что $AH_1+CH_3=BH_2$.

Ч.т.д.

**4. В остроугольном треугольнике *ABC BM*, *AK*, *CT* – высоты, *H* – точка их пересечения. Докажите, что $\angle TMA = \angle KMC$.**

<u>Доказательство.</u>




1. Т.к. $\angle ATH = \angle HMA = 90^0$, то точки *A*, *T*, *H*, *M* лежат на окружности с диаметром *AH*. Следовательно, $\angle TMA = \angle THA$ (вписанные, опирающиеся на общую дугу).

2. Аналогично доказываем, что точки *C*, *K*, *M*, *H* лежат на окружности с диаметром *CH*, и $\angle KMC = \angle KHC$.

3. Учитывая, что $\angle THA = \angle KHC$, как вертикальные, получаем требуемое равенство: $\angle TMA = \angle KMC$.

Ч.т.д.