XII Открытая Краевая олимпиада по геометрии

среди учащихся 8-11 кл. им. проф. С.А. Анищенко

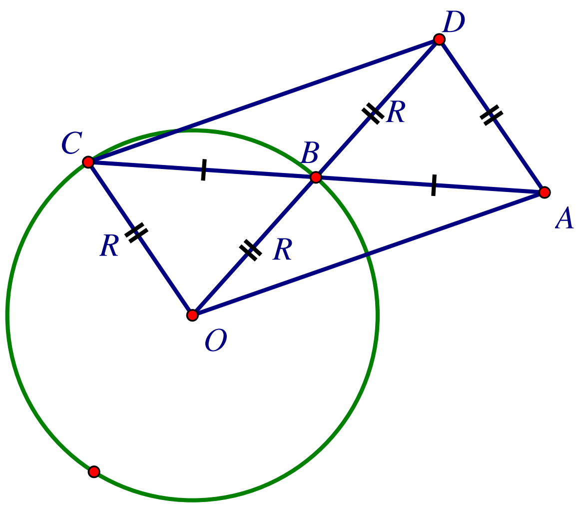
Заочный тур

10 класс

Задача 1. *Дана окружность с центром O и точка A вне её. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что AB = BC.*

Анализ.

Предположим, что задача решена и прямая AB - искомая.

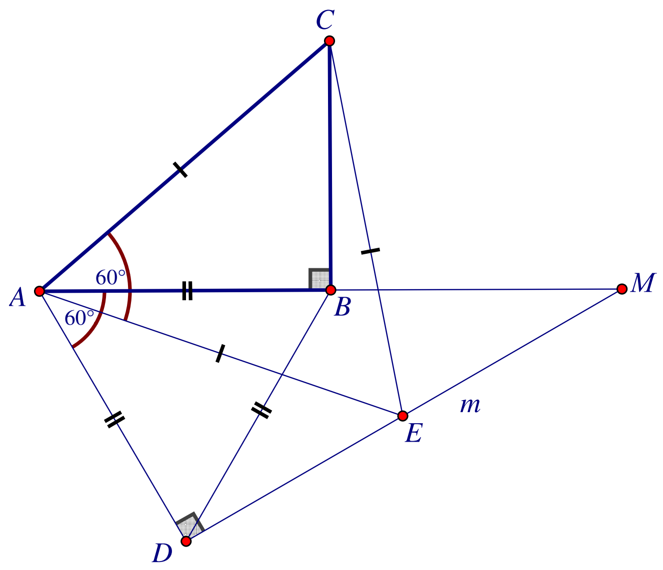


1. Рассмотрим точку D такую, что B - середина отрезка OD.
2. Рассмотрим четырёхугольник AOCD - параллелограмм (диагонали точкой пересечения делятся пополам).
3. По свойству параллелограмма AD = CO = R, по построению OD = 2OB = 2R.
4. Итак, задача сводится к построению точки D, удовлетворяющей двум условиям: 1) D: AD = R; 2) OD = 2R

Построение. Строим последовательно: 1) окружность c_1 с центром в точке O и радиуса 2R; 2) окружность c_2 с центром в точке A и радиуса R; 3) общую точку D пересечения окружностей c_1 и c_2; 4) общую точку B отрезка OD и данной окружности; 5) прямую AB – искомая.

Задача 2. *Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AB во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник ADB, а на гипотенузе AC во внутреннюю сторону - равносторонний треугольник AEC.*

Прямые AB и DE пересекаются в точке M. Весь чертеж стерли, оставив только точки A и B. Восстановите точку M.



Решение. 1. Повернём треугольник ABC вокруг точки A по часовой стрелке на 60º градусов. При этом A отобразится на себя, C - на точку E, а B - на D. Треугольник ABC отобразится на треугольник ADE, поэтому ∠ADE = ∠ABC = 90º.

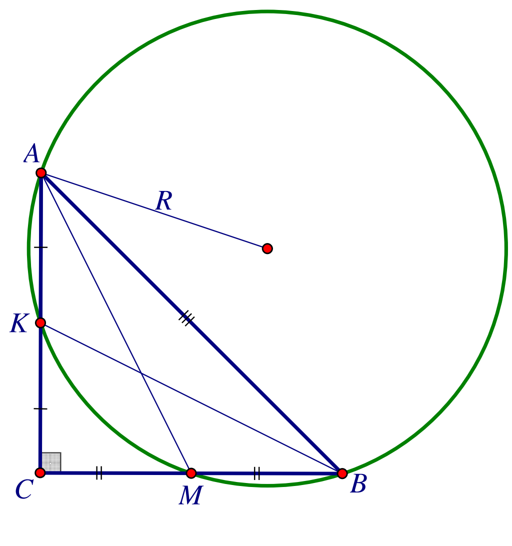
2. Для восстановления точки M достаточно построить:

а) на отрезке AB равносторонний треугольник ABD;

б) перпендикуляр m к AD, содержащий точку D.

в) точку пересечения M перпендикуляра m и прямой AB.

Задача 3. *В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB=2см проведены медианы AM и BK. Известно, что около четырёхугольника ABMK можно описать окружность. Найдите радиус этой окружности.*



Решение

1. Пусть CM = x, CK = y. По свойству секущей $x \cdot 2x = y \cdot 2y$. Отсюда x = y, CM = CK, AC = BC.

2. AC = BC = $\sqrt{2}$, ∠A = ∠B = 45°.

3. BK = $\sqrt{10}/2$, SinA = $\sqrt{2}/2$.

4. BK / SinA = 2R ⇒ 2R = $\sqrt{5}$

5. R = $\sqrt{5}/2$.

Ответ. $\sqrt{5}/2$

Задача 4. *Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4 см. На ребрах A_1D_1 и CC_1 взяты соответственно точки E_1 и C_2 такие, что $A_1E_1:E_1D_1 = 1:3$, C_2 – середина CC_1. Найдите расстояние от точки C_2 до точки T пересечения прямой C_2E_1 с плоскостью A_1C_1D. Постройте точку T на чертеже.*

Решение. Пусть $E_2 = EE_1 \cap A_1D$.

1. $EC = \sqrt{9+16} = 5$

2. $C_2E_1 = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.

3. $\triangle A_1D_1D \sim \triangle A_1E_1E_2$ с коэффициентом 1/4 $\Rightarrow E_1E_2 = 1$.

4. $\triangle C_2TC_1 \sim \triangle E_1TE_2$ с коэффициентом 1/2

5. $C_2T : E_1T = 2 : 1 \Rightarrow C_2T = 2C_2E_1/3 = 2\sqrt{29}/3$.

Ответ. $2\sqrt{29}/3$.