XII Открытая Краевая олимпиада по геометрии

среди учащихся 8-11 кл. им. проф. С.А. Анищенко

Заочный тур

11 класс

Задача 1. Существует ли выпуклый 2017-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов?

Решение.

Докажем от противного, что такого 2017-угольника не существует.

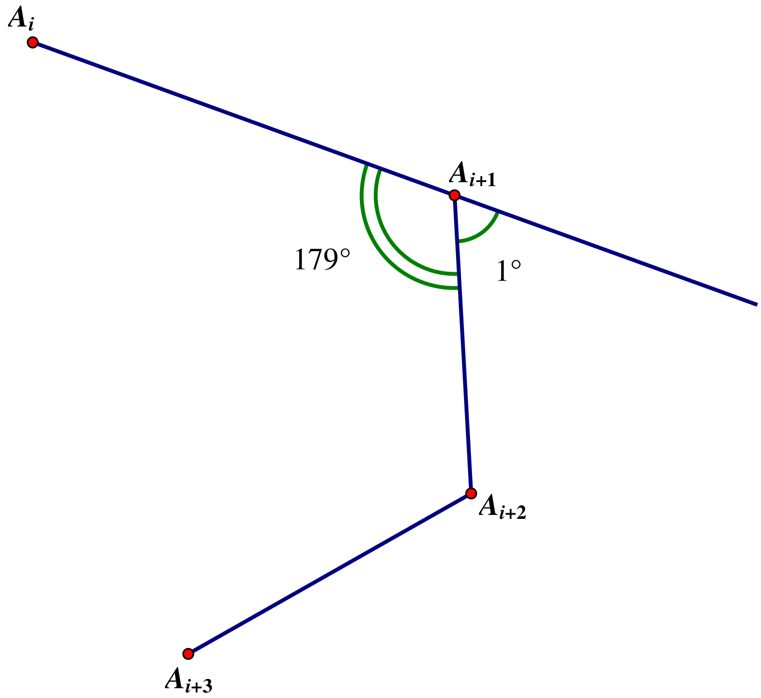
Т.к. по условию у 2017-угольникавсе углы выражаются целым числом градусов, то каждый внутренний угол этого многоугольника не превосходит 179°, а, соответственно, каждый внешний угол составляет не менее 1°.

Способ №1.

Предположим, что такой 2017-угольниксуществует. Если каждый внутренний угол этого многоугольника не превосходит 179°, то сумма его углов не превосходит $2017 \bullet 179° = 361043°$. С другой стороны, известно, что сумма внутренних углов любого выпуклого 2017-угольника равна $2015 \bullet 180° = 362700°$. Полученное противоречие показывает, что такого многоугольника не существует.

Способ №2.

Предположим, что такой 2017-угольник существует. Если каждый внешний угол составляет не менее 1°, то сумма внешних углов не менее 2017°. С другой стороны, известно, что сумма внешних углов любого выпуклого 2017-угольника равна 360°. Полученное противоречие показывает, что такого многоугольника не существует.



Ответ: не существует.

Задача 2.Существует ли тетраэдр, высоты которого равны 1, 2, 3 и 6?

Решение.

Докажем от противного что такого тетраэдра не существует.

Предположим, что такой тетраэдр $ABCD$существует. Обозначим через V его объем, а через S_{ABC}, S_{ACD}, S_{BCD}, S_{ABD} – площади его граней, на плоскости которых опущены высоты 1, 2, 3 и 6 соответственно. Зная, что объем тетраэдра находится по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$,получаем $V = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3}S_{ACD} = \frac{3}{3}S_{BCD} = \frac{6}{3}S_{ABD}$. Отсюда$S_{ABC}$=3$V$, S_{ACD}=$\frac{3}{2}V$, S_{BCD}=V, S_{ABD}=$\frac{1}{2}V$. Заметим, чтоприэтомS_{ABC}=S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABD}.

Опустим из точки D перпендикуляр на плоскость грани ABC. Пусть точка D' – основание данного перпендикуляра. Тогда, если точка D' лежит внутри треугольника ABC, то сумма площадей проекций боковых граней равна площади треугольника ABC (рис.2), если точка D' лежит вне треугольника ABC, то сумма площадей проекций боковых граней больше площади треугольника ABC (рис.1). Таким образом, $S_{ABC} \leq S_{ACD'} + S_{BCD'} + S_{ABD'}$.

Обозначим α – угол между гранями ABC и ACD, β – угол между гранями ABC и BCD, γ – угол между гранями ABC и ABD. Тогда, $S_{ACD'} = S_{ACD}\cos\alpha$,$S_{BCD'} = S_{BCD}\cos\beta$, $S_{ABD'} = S_{ABD}\cos\gamma$.

Равенство $S_{ABC}=S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABD}$может выполняться только в том случае, когда точка D' лежит внутри треугольника ABC и $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1$. Следовательно, α = β = γ = 0. Это означает, что точки Dи D' совпадут, т.е. точка Dбудет принадлежать плоскости грани ABC. А четыре точки, лежащие в одной плоскости, не могут являться вершинами тетраэдра. Тем самым, получено противоречие.

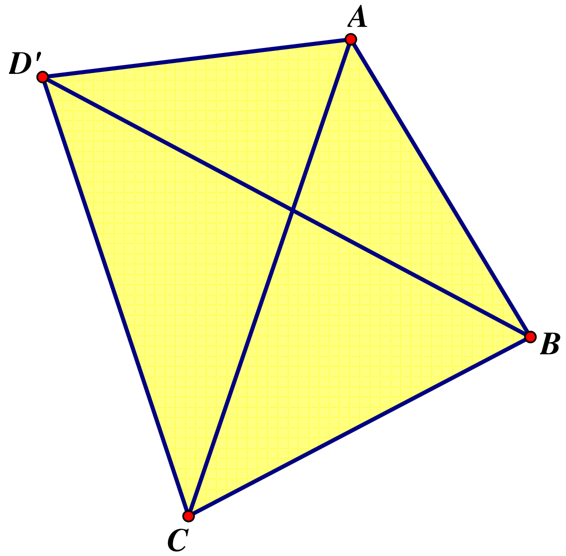


Рис.1

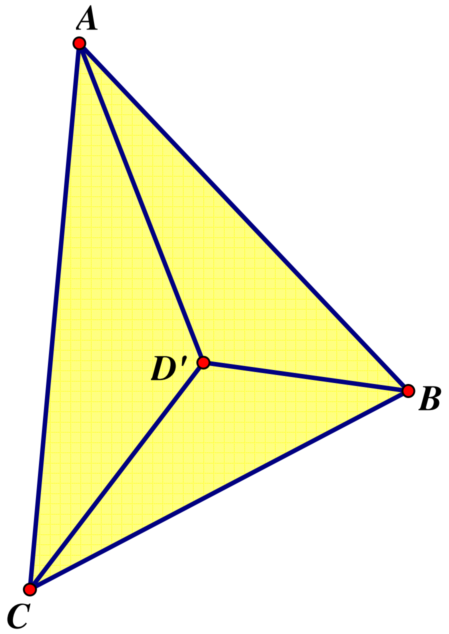


Рис.2

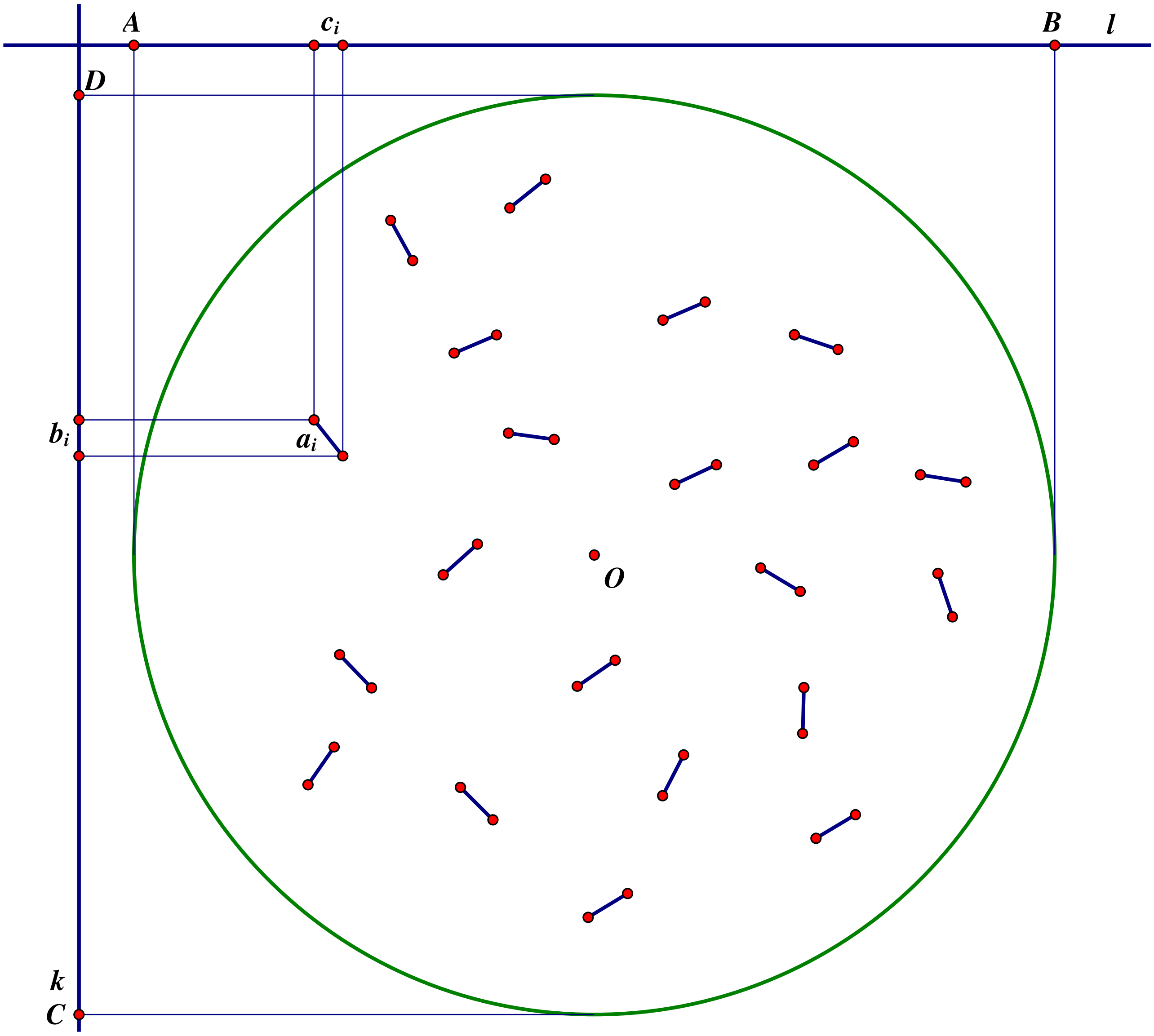
Ответ: не существует.

Задача 3.Внутри окружности радиуса 5расположено 20 отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной прямой l и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.

Доказательство.

Пусть k — произвольная прямая, перпендикулярная l. Пусть a_i – один из отрезков, а b_i и c_i – длины его проекций на прямые k и l соответственно. Из неравенства треугольника, $b_i + c_i \geq 1$. Сложив такие неравенства для каждого из отрезков, получим $(b_1 + \cdots + b_{20}) + (c_1 + \cdots + c_{20}) \geq 20$.Пусть для определенности$b_1 + \cdots + b_{20} \leq c_1 + \cdots + c_{20}$.Тогда$c_1 + \cdots + c_{20} \geq 10$.

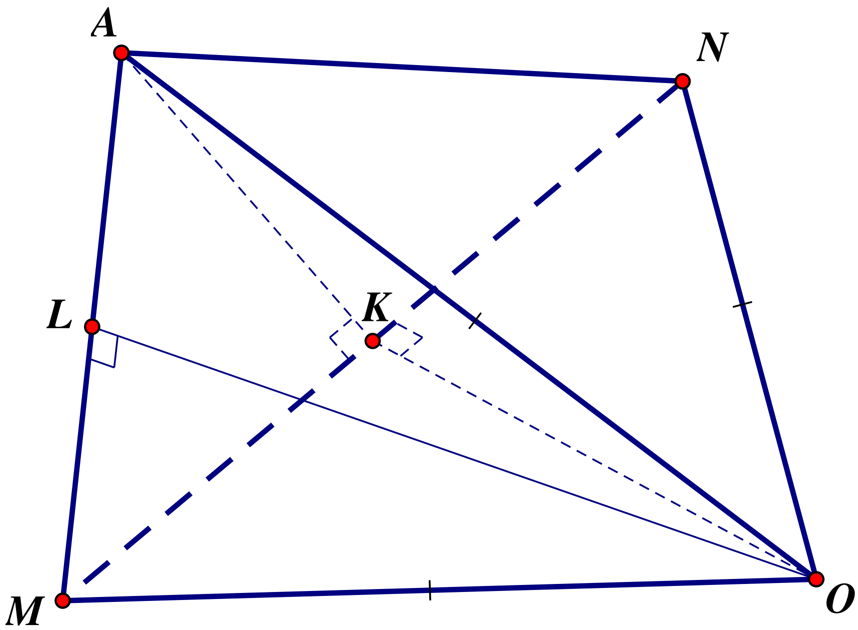
Все данные отрезки проецируются на отрезок AB длиной 10, так как они лежат внутри окружности радиуса 5. Поэтому, по принципу Дирихле, на l есть точка, в которую проецируются точки по крайней мере двух данных отрезков. Перпендикуляр кl, проведенный через эту точку, пересекает по крайней мере два данных отрезка.


A
c_i
B
l
D
b_i
a_i
O
k
C

Задача 4. Дан шар с диаметром AB и две равные хорды AM и AN, расположенные под углом α к диаметру. Найдите угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β.

Решение.

Пусть O – центр сферы. Рассмотрим тетраэдр $OAMN$. В нем, по условию, $\angle MAO=\angle NAO=\alpha$ и $\angle MON=\beta$. Кроме того, $OA = OM = ON = R$ как радиусы шара.



Пусть K – середина MN, L – середина AM. Тогда из равнобедренных треугольников MON и AOM находим, что

$$MK = OM \sin \angle MOK = R \sin \frac{\beta}{2}.$$

$$AM = 2AL = 2AO \cos \angle MAO = 2R \cos \alpha.$$

Треугольники MON и AOM равны, следовательно треугольник MAN равнобедренный. Из треугольника MAN находим, что

$$\sin \angle MAK = \frac{MK}{AM} = \frac{R \sin \frac{\beta}{2}}{2R \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$\angle MAN = 2\angle MAK = 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \alpha} \right).$$

Ответ: $\mathbf{2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \alpha} \right)}$