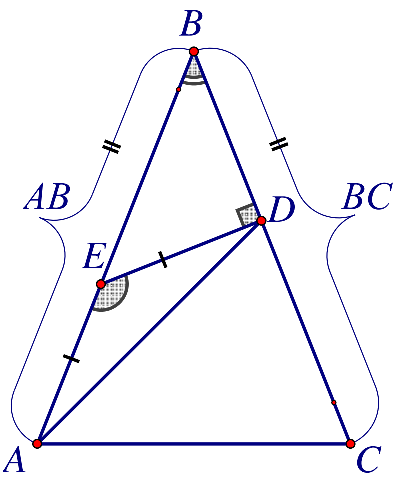
XII Открытая Краевая олимпиада по геометрии

среди учащихся 8-11 кл. им. проф. С.А. Анищенко

Заочный тур, 8 класс

З а д а ч а 1**.** *В треугольнике ABC AB = BC. Из точки E на стороне AB опущен перпендикуляр ED на BC, причем AE = ED. Найдите угол DAC.*



Решение.

1. Угол AED – внешний для ΔBED, поэтому:

1. $\angle AED = 90^0 + \angle B = 90^0 + (180^0 - 2\angle A) =$

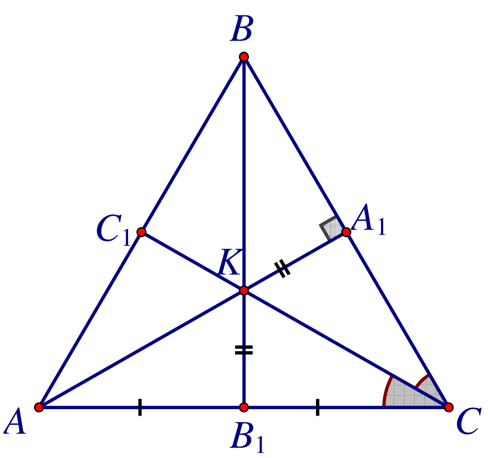
$= 270^0 - 2\angle A$.

2. $\angle EAD = (1/2)\ (180^0 - \angle AED) = \angle A - 45^0$. Следовательно, $\angle DAC = 45^0$.

Ответ: $\angle DAC = 45^0$.

З а д а ч а 2. *Высота AA_1, медиана BB_1 и биссектриса CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K, причем $A_1K = B_1K$. Докажите, что отрезок C_1K имеет ту же длину.*

Доказательство.



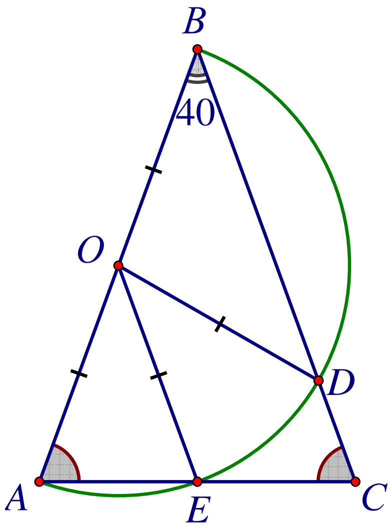
1. Так как $K \in CC_1$, то точка K равноудалена от AC и BC.

2. Так как $KA_1 = KB_1$ (по условию), и $KA_1 \perp BC$, то $KB_1 \perp AC$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$), и BB_1 –биссектриса.

3. BB_1, CC_1 – биссектрисы, $BB_1 \cap CC_1 = K$, следовательно, AA_1 тоже биссектриса. Последнее означает, что треугольник ABC равносторонний и, следовательно, $C_1K = A_1K = B_1K$.

Что и требовалось доказать.

З а д а ч а 3. *Угол при вершине равнобедренного треугольника равен* 40^0. *Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три дуги. Найдите градусные меры этих дуг.*



Решение.

1. Пусть O – середина AB.

2. Так как $OA = OE = R$, то треугольник AOE равнобедренный, и $\angle OAE = \angle OEA = 70^0$.

Тогда $\angle AOE = 40^0$.

3. Так как $OB = OD = R$, то треугольник OBD равнобедренный, и $\angle OBD = \angle ODB = 40^0$.

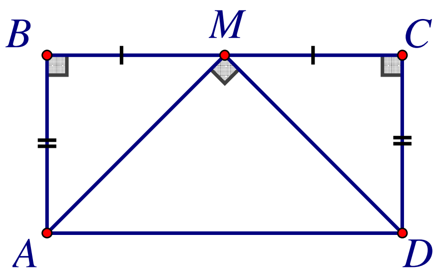
Тогда $\angle BOD = 100^0$.

4. Очевидно, что $\angle EOD = 180^0 - 100^0 - 40^0 = 40^0$.

Ответ: 40^0, 40^0, 100^0.

З а д а ч а 4. *$ABCD$ – прямоугольник, M – середина BC, причем $MA \perp MD$ и $P_{ABCD} = 24$. Найдите стороны прямоугольника.*

Решение.



1. $\Delta ABM = \Delta DCM$ (по двум катетам), следовательно $\angle BMA = \angle CMD$.

2. Так как $\angle BMA + 90^0 + \angle CMD = 180^0$, то $\angle BMA = \angle CMD = 45^0$.

3. Тогда ΔABM равнобедренный, и $AB = BM$. Положим $AB = BM = x$.

4. $BC = 2x$. Зная, что $P_{ABCD} = 24$, находим $x = 4$.

Ответ: 4, 4, 8, 8.